ediciones sm

Funciones exponenciales y logarítmicas

1. Una función exponencial de la forma $f(x) = k\,a^x$, $a > 0$, es tal que $f(2) = 20$ y $f(-1) = 2{,}5$.

a) Escribe su expresión algebraica.
b) Represéntala gráficamente.

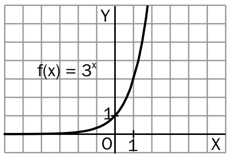
2. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes expresiones:

a) $1 < \log 20 < 2$
b) $\log 100x = 2 \log x$
c) $3 < \log_2 7 < 4$
d) $\log_9 1 = 0$
e) $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 1$
f) $\log 6 - \log 2 = \log 4$

3. A partir de la gráfica de la función $f(x) = 3^x$ construye las gráficas de:

a) $f_1(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

b) $f_2(x) = \log_3 x$



4. a) Calcula a sabiendo que $\log_a 9 + \log_a 4 = 2$.
b) Calcula el menor número entero x que verifica que $(1{,}34)^x > 5$.

5. Calcula el valor de la expresión $\dfrac{(0{,}16)^3 \cdot 2\,000}{\sqrt{128}}$ sin usar la calculadora. Utiliza logaritmos y toma 0,3 como valor de log 2.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 56$
b) $5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$
c) $4^{x+3} = \dfrac{1}{2^{x-3}}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log(x + 1) - \log x = 1$
b) $2 \log x - \log(6 - x) = 0$
c) $\log(4x - 1) - \log(x - 2) = \log 5$

8. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$
b) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$

9. El crecimiento aproximado de la población de un país viene dado por la fórmula $P(t) = P_0 \cdot (2{,}7)^{\frac{m \cdot t}{100}}$, siendo P(t) la población final, P_0 la población inicial, m la tasa media de crecimiento anual (en tanto por cien) y t el tiempo transcurrido (en años).

Un país A tenía en 1990 una población de 14 000 000 de habitantes. Sabiendo que su tasa media de crecimiento anual es del 2,5 %, calcula:

a) Cuántos habitantes tendrá en el año 2010.
b) Cuántos años tienen que pasar para que duplique su población respecto a la del año 1990.
c) La tasa media de crecimiento que tendría si la población pasase de los 14 millones de habitantes de 1990 a 20 millones de habitantes en el año 2020.

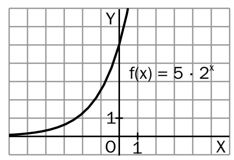
SOLUCIONES

1. a) $\begin{cases} f(2)=20 \\ f(-1)=2{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ka^2=20 \\ ka^{-1}=2{,}5 \end{cases} \Rightarrow$

$a^3 = \dfrac{20}{2{,}5} = 8 \Rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ k = 5 \end{matrix}$

$f(x) = 5 \cdot 2^x$

b)



2. a) Verdadero, pues $1 = \log 10$, $2 = \log 100$ y $\log x$ es creciente.

b) Falso (excepto para $x = 100$), pues $2 \log x = \log x^2$, que es en general distinto de $\log 100x$. Coinciden si $x^2 = 100x$, es decir, si $x = 100$ o $x = 0$ (solución no válida pues no existe $\log 0$).

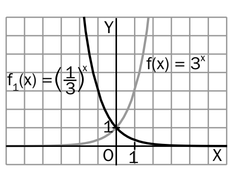
c) Falso, pues $\log_2 7 = \dfrac{\log 7}{\log 2} = 2{,}8073$.

d) Verdadero, pues $9^0 = 1$.

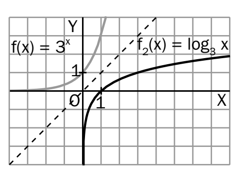
e) Verdadero, $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \dfrac{\log 3}{\log 2} \cdot \dfrac{\log 2}{\log 3} = 1$.

f) Falso, $\log 6 - \log 2 = \log \dfrac{6}{2} = \log 3 \neq \log 4$.

3. a)



b)



4. a) $\begin{cases} \log_a 9 + \log_a 4 = 2 \\ \log_a 9 + \log_a 4 = \log_a 9 \cdot 4 = \log_a 36 \end{cases} \Rightarrow$

$\log_a 36 = 2 = \log_a a^2 \Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = 6$

Observación: Se desprecia $a = -6$ porque la base de un logaritmo debe ser mayor que cero.

b) $(1{,}34)^x > 5 \iff x > \log_{1{,}34} 5 \iff$

$x > \dfrac{\log 5}{\log 1{,}34} \iff x > 5{,}4991...$

Solución: $x = 6$.

5. $\log \dfrac{(0{,}16)^3 \cdot 2\,000}{\sqrt{128}} = 3 \log 0{,}16 + \log 2\,000 - \dfrac{1}{2} \log 128 =$

$= 3 \log \dfrac{2^4}{100} + \log(2 \cdot 1\,000) - \dfrac{1}{2} \log 2^7 =$

$= 3(4 \log 2 - \log 100) + \log 2 + \log 1\,000 - \dfrac{7}{2} \log 2 =$

$= 3(1{,}2 - 2) + 0{,}3 + 3 - \dfrac{2{,}1}{2} = -0{,}15$

6. a) $2^x(1 + 2 + 4) = 56 \iff 2^x = 8 \iff x = 3$

b) Haciendo el cambio de variable $5^x = a$ se obtiene: $a^2 + 4a - 5 = 0 \iff a = 1, a = -5$.
Se desprecia la solución negativa, pues $5^x > 0$.
Se tiene que $5^x = 1$ y, por tanto, $x = 0$.

c) $4^{x+3} = 2^{2(x+3)} = 2^{-(x-3)} \Rightarrow 2x + 6 = -x + 3 \Rightarrow$ $x = -1$

7. a) $\log \dfrac{x + 1}{x} = \log 10 \Rightarrow \dfrac{x + 1}{x} = 10 \Rightarrow x = \dfrac{1}{9}$

b) $\log \dfrac{x^2}{6 - x} = \log 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{6 - x} = 1 \Rightarrow$

$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -3$

La solución $x = -3$ no vale pues no existe $\log -3$.

c) $\log \dfrac{4x - 1}{x - 2} = \log 5 \Rightarrow \dfrac{4x - 1}{x - 2} = 5 \Rightarrow$

$4x - 1 = 5x - 10 \Rightarrow x = 9$

8. a) Cambio de variable $2^x = a$ y $2^y = b$:

$\begin{cases} a + b = 10 \\ \dfrac{a}{b} = 4 \end{cases} \Rightarrow 4b + b = 10 \Rightarrow$

$\begin{cases} b = 2 \Rightarrow 2^y = 2 \\ a = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 1$

b) $\begin{cases} \log xy = \log 1\,000 \\ \log \dfrac{x}{y} = \log 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1\,000 \\ \dfrac{x}{y} = 10 \end{cases} \Rightarrow$

$10y^2 = 1\,000 \Rightarrow y = \pm 10;\ x = 10y = \pm 100$

c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ \log_2 \dfrac{x}{y} = \log_2 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ \dfrac{x}{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 2y - y = 4 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 8 \end{cases}$

9. a) $P(20) = 14\,000\,000(2{,}7)^{\frac{2{,}5 \cdot 20}{100}}$ habitantes $=$ $= 22\,135\,943$ habitantes.

b) $28\,000\,000 = 14\,000\,000(2{,}7)^{\frac{2{,}5t}{100}} \iff$

$\iff 2 = (2{,}7)^{0{,}025t} \iff \log_{2{,}7} 2 = 0{,}025t \iff$

$\iff t = \dfrac{\log_{2{,}7} 2}{0{,}025} = \dfrac{\log 2}{0{,}025 \log 2{,}7} = 27{,}91$

Solución: 27 años y 11 meses.

c) $20\,000\,000 = 14\,000\,000(2{,}7)^{\frac{30\,m}{100}} \iff$

$\iff 2 = (2{,}7)^{0{,}3m} \iff \log_{2{,}7} 2 = 0{,}3\,m \iff$

$\iff m = \dfrac{\log_{2{,}7} 2}{0{,}3} = \dfrac{\log 2}{0{,}3 \log 2{,}7} = 2{,}3261$

La tasa media de crecimiento sería de un 2,3 %.